GEOMETRÍA ANALÍTICA

Planeador de clase

Docente:

María Cristina Marín Valdés

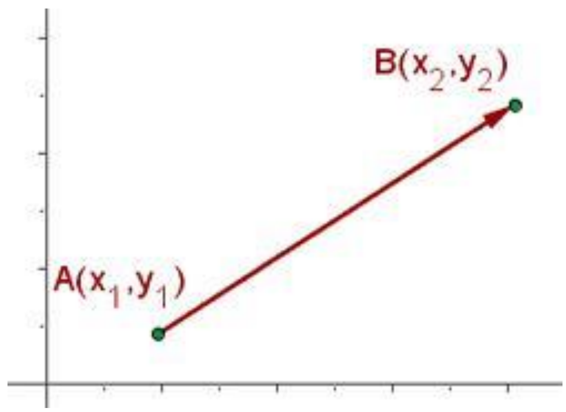
I.E.E.F.B

GEOMETRÍA ANALÍTICA

La geometría analítica es una rama de las matemáticas que estudia con profundidad las figuras, sus distancias, sus áreas, puntos de intersección, ángulos de inclinación, puntos de división, volúmenes, etc. Es un estudio más profundo para saber con detalle todos los datos que tienen las figuras geométricas. Para ello emplea técnicas básicas de análisis matemático y de álgebra.

DISTANCIA ENTRE PUNTOS

La **distancia entre dos puntos** equivale a la longitud del segmento de recta que los une, expresado numéricamente. **Distancia entre dos puntos**. Dados **dos puntos** cualesquiera A (x1, y1), B (x2, y2), definimos la **distancia** entre ellos, d (A, B), como la longitud del segmento que los separa.



FÓRMULA DE DISTANCIA ENTRE PUNTOS:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLOS:

Ejemplo 1: Calcular la distancia entre los puntos A (-2, 5) y B (4, -3)

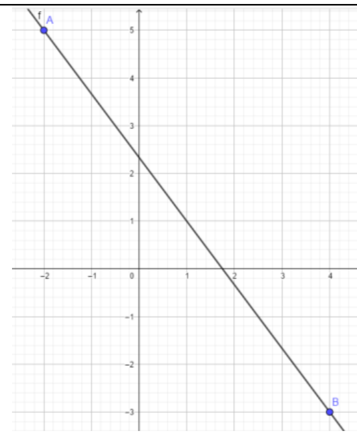
Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

A $(\overset{x_1,\ y_1}{-2,\ 5})$ y B $(\overset{x_2,\ y_2}{4,\ -3})$

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-3 - 5)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(4+2)^2 + (-3 - 5)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{36 + 64} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{100} \rightarrow$$
$$d = 10 \rightarrow Respuesta$$



Ejemplo 2: Calcular la distancia entre los puntos A (4, 3) y B (3, 2)

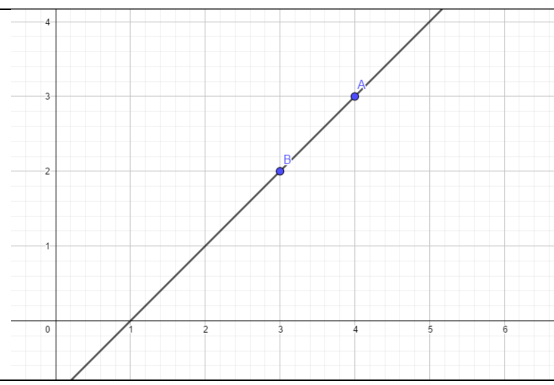
Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

A $(\overset{x_1, y_1}{4, 3})$ y B $(\overset{x_2, y_2}{3, 2})$

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(3-4)^2 + (2 - 3)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{1 + 1} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{2} \rightarrow Respuesta$$



Ejemplo 3: Calcular la distancia entre los puntos A (0, 1) y B (3, -1)

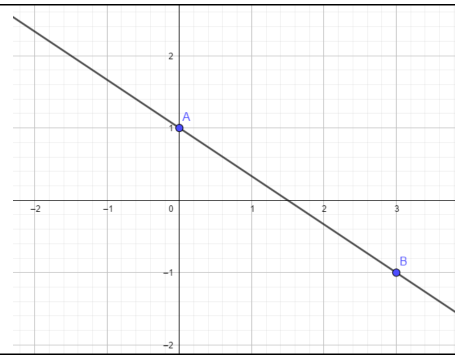
Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

x_1, y_1 x_2, y_2
A (0, 1) y B (3, -1)

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-1 - 1)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{9 + 4} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{13} \rightarrow Respuesta$$



Ejemplo 4: Calcular la distancia entre los puntos A (7, 3) y B (3, 7)

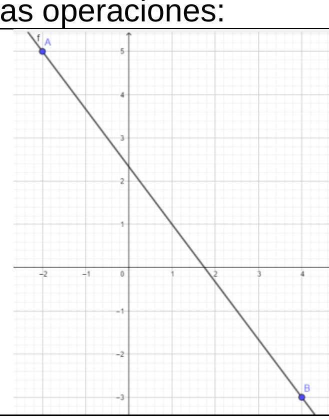
Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

x_1, y_1 x_2, y_2
A (7, 3) y B (3, 7)

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(3 - 7)^2 + (7 - 3)^2} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2} \quad d = \sqrt{16 + 16} \rightarrow$$
$$d = \sqrt{32} \rightarrow Esta\ raíz\ no\ es\ exacta,\ debe\ descomponerse$$
$$d = 4\sqrt{2} \rightarrow Respuesta$$



PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO:

Es el punto que se encuentra a la misma distancia de otros dos puntos cualquiera o extremos de un segmento. Más generalmente punto equidistante en matemática, es el punto que se encuentra a la misma distancia de dos elementos geométricos, ya sean puntos, segmentos, rectas, etc. Para encontrar el punto medio de un segmento se calcula el promedio entre las coordenadas de cada uno de los ejes.

$$\text{Pm}= \left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Ejemplo 5: Calcular el punto medio entre los puntos A (5, 2) y B (1, 6)

Solución:

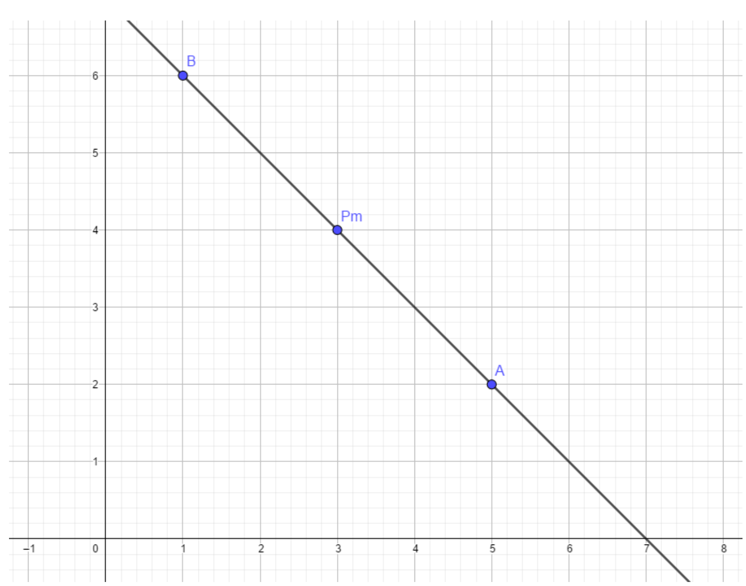
Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y":

A $(\overset{x_1,y_1}{5,\ 2})$ y B $(\overset{x_2,y_2}{1,\ 6})$

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$Xm = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow$$
$$Xm = \frac{5+1}{2} \rightarrow$$
$$Xm = \frac{6}{2} \rightarrow Pm(x) = 3$$
$$Ym = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow$$
$$Ym = \frac{2+6}{2} \rightarrow$$
$$Ym = \frac{8}{2} \rightarrow Pm(x) = 4$$

Pm= (3, 4) $\rightarrow Respuesta$



Ejemplo 6: Calcular el punto medio entre los puntos A (-3, 7) y B (2, - 4)

Solución:

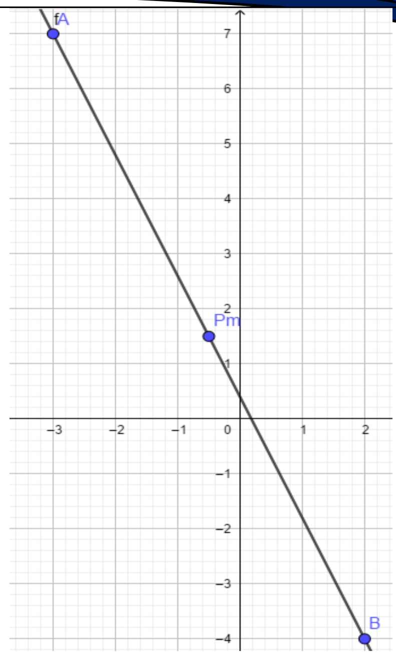
Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y":

A $(\overset{x_1,y_1}{-3,\ 7})$ y B $(\overset{x_2,y_2}{2,\ -4})$

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$Xm = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow$$
$$Xm = \frac{-3 + 2}{2} \rightarrow$$
$$Xm = \frac{-1}{2} \rightarrow {\color{red}Pm(x)} = {\color{green}\mathbf{\frac{-1}{2}}}$$
$$Ym = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow$$
$$Ym = \frac{7 + (-4)}{2} \rightarrow$$
$$Ym = \frac{7 - 4}{2} \rightarrow {\color{red}Pm(y)} = {\color{green}\mathbf{\frac{3}{2}}}$$

Pm= $\left(\frac{-1}{2}\,,\ \frac{3}{2}\right) \rightarrow Respuesta$



Ejemplo 7: Dado el punto P(-4, -5) y el punto medio (2,2). Hallar el punto Q (x_2, y_2)

Solución:

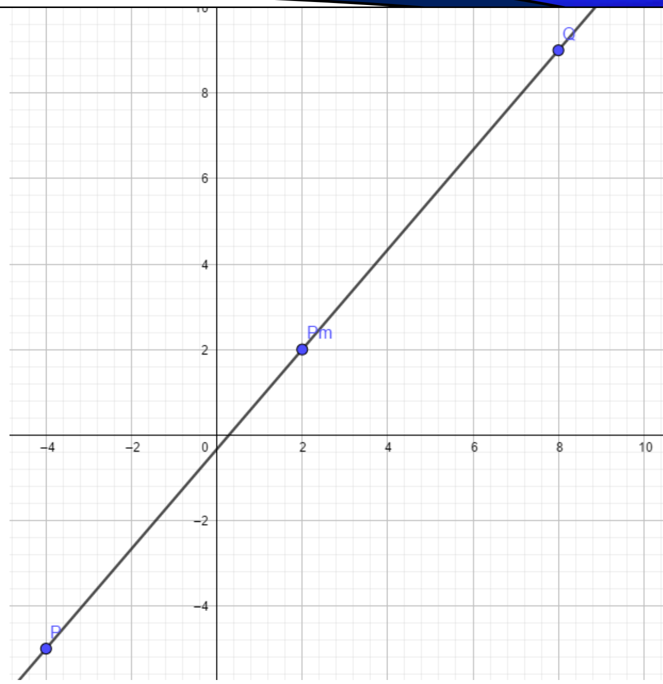
Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y". Teniendo en cuenta que en este ejercicio ya dan el punto medio.

P $\overset{x_1, y_1}{(-4, -5)}$ y Pm $\overset{x_2, y_2}{(2, 2)}$ Q (x_2, y_2)

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$Xm = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow$$
$$2 = \frac{-4 + x_2}{2} \rightarrow$$
$$4 = -4 + x_2 \rightarrow$$
$$x_2 = 4 + 4 \rightarrow \boldsymbol{x_2 = 8}$$
$$Ym = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow$$
$$2 = \frac{-5 + y_2}{2} \rightarrow$$
$$4 = -5 + y_2 \rightarrow$$
$$y_2 = 4 + 5 \rightarrow \boldsymbol{y_2 = 9}$$

Q= $(\mathbf{8}\,,\mathbf{9}) \rightarrow Respuesta$



Ejemplo 8: El punto medio de un segmento es (5,5), dado el punto A de coordenadas (-1, 3). Hallar el punto B.

<u>Solución:</u>

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”. Teniendo en cuenta que en este ejercicio ya dan el punto medio.

Pm $\overset{x_1, y_1}{(5, 5)}$ y A $\overset{x_2, y_2}{(-1, 3)}$; B (x_2, y_2)

Se reemplazan los números en la fórmula y se resuelven las operaciones:

$$Xm = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow$$
$$5 = \frac{-1 + x_2}{2} \rightarrow$$
$$10 = -1 + x_2 \rightarrow$$
$$x_2 = 10 + 1 \rightarrow \boldsymbol{x_2 = 11}$$

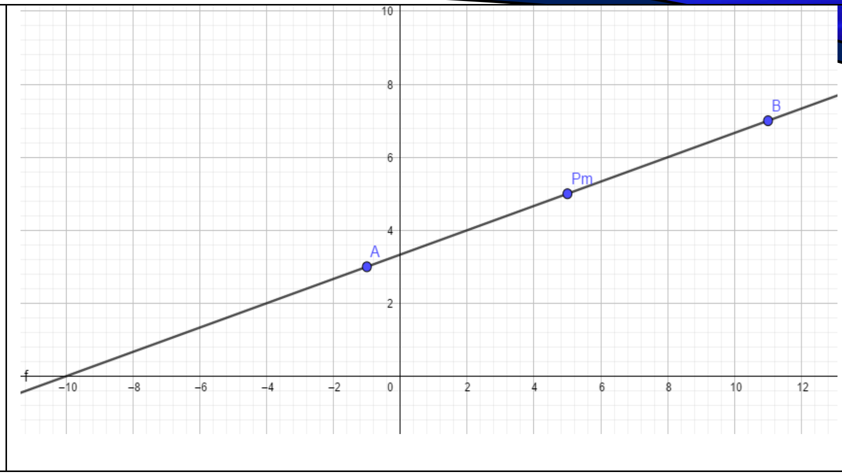
$$Ym = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow$$

$$5 = \frac{3 + y_2}{2} \rightarrow$$

$$10 = 3 + y_2 \rightarrow$$

$$y_2 = 10 - 3 \rightarrow \boldsymbol{y_2 = 7}$$

B= $(\mathbf{11}, \mathbf{7}) \rightarrow Respuesta$



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN No.1

Haciendo uso del concepto de distancia entre puntos y punto medio de un segmento, dar solución a los siguientes ejercicios y representar gráficamente los puntos de coordenadas.

1. Hallar la distancia entre los puntos A (0,4) y B (9, -2).
2. Hallar la distancia entre los puntos A (2, -5) y B (1, -6).
3. El punto medio de un segmento es $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$, uno de los extremos es (2,3). Hallar el otro extremo.
4. Hallar la distancia y el punto medio dados los puntos A (0,6) y B -4, -2).
5. Hallar la distancia y el punto medio de un segmento cuyas coordenadas son el origen y el punto Q (5,7).

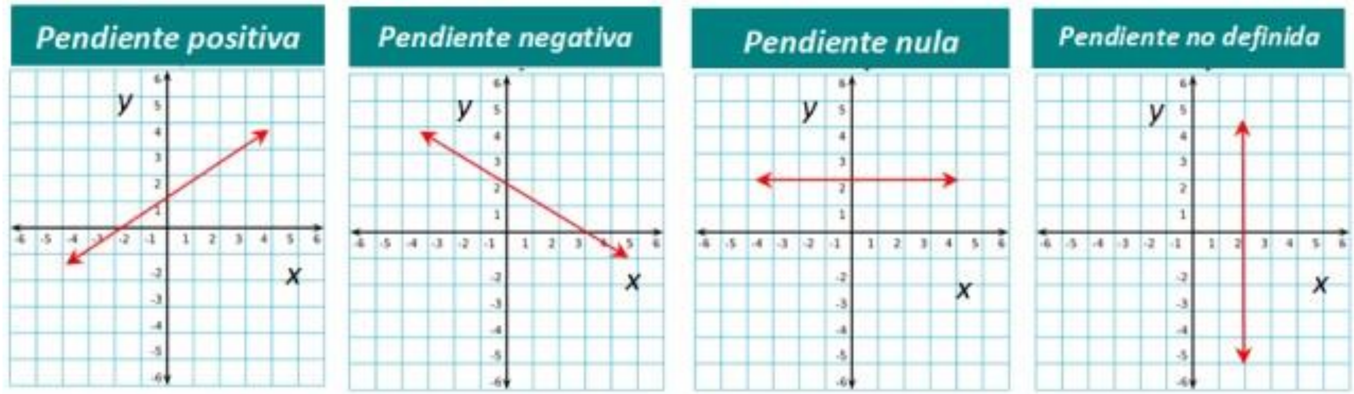
PENDIENTE DE LA RECTA

Conceptos básicos:

<u>Inclinación:</u> es el ángulo medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, formado por una recta y el eje positivo "X".

<u>Pendiente:</u> es la tangente del ángulo de inclinación de la recta. Si el ángulo de inclinación de una recta es de 90°, no está definida la pendiente, ya que tangente de 90° no existe. Si el ángulo de inclinación es de 180°, su pendiente será cero; si el ángulo es agudo la pendiente será positiva; si el ángulo es obtuso la pendiente de la recta será negativa.

<u>Tipos de pendiente:</u>



Cálculo de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ó } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

EJEMPLOS:

Ejemplo 1: Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (-4, 6) y B (6, -2)

Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y":

A $(\overset{x_1, y_1}{-4, 6})$ y B $(\overset{x_2, y_2}{6, -2})$

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

<table>
<tr>
<td>

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$

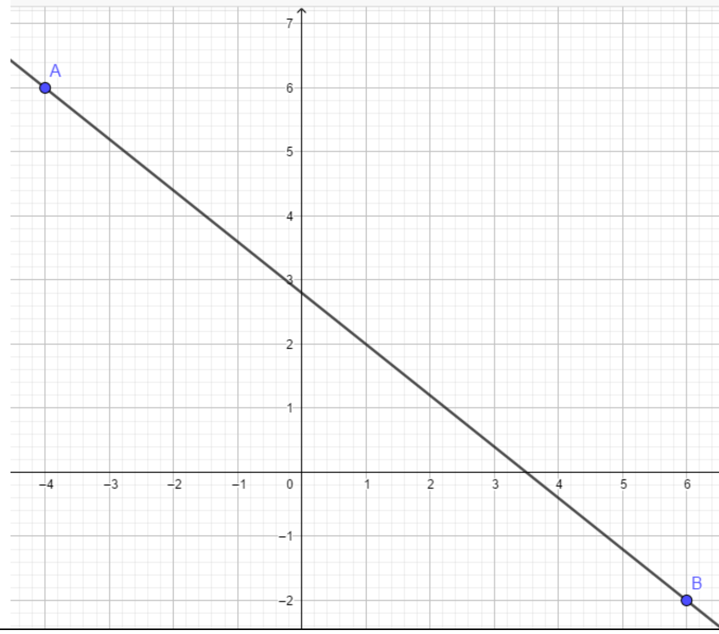
$m = \frac{-2 - 6}{6 - (-4)} \rightarrow$

$m = \frac{-8}{6 + 4} \rightarrow$

$m = \frac{-8}{10}, se\ simplifica:$

$\mathbf{m = \frac{-4}{5}} \rightarrow Respuesta$

Para calcular el ángulo de inclinación, se hace a través del
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

ángulo de la tangente: $\tan^{-1}\left(\frac{-4}{5}\right) \rightarrow$ $\alpha = 141°$	

Conclusión: la pendiente de este ejercicio es $\frac{-4}{5}$, corresponde a un ángulo obtuso de 141° y por lo tanto, el tipo de pendiente es negativa.

Ejemplo 2: Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos M (-1, -1) y N (4, 4)

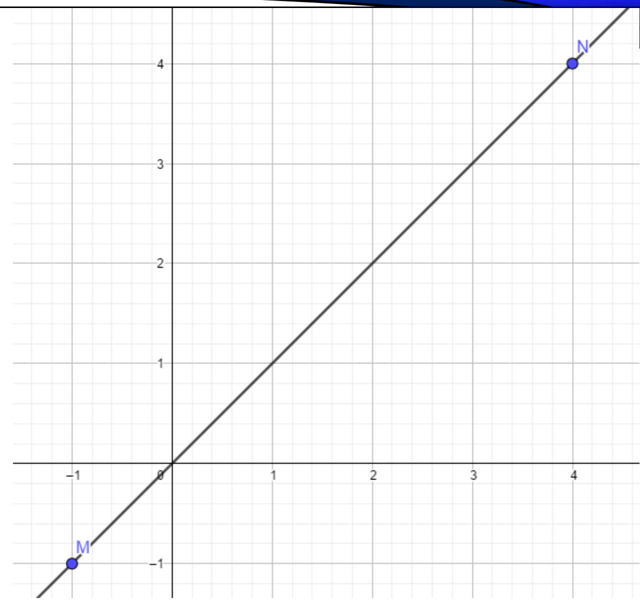
Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y":

M $(\overset{x_1,\, y_1}{-1, -1})$ y N $(\overset{x_2,\, y_2}{4, 4})$

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{4-(-1)}{4-(-1)} \rightarrow$ $m = \frac{4+1}{4+1} \rightarrow$ $m = \frac{5}{5}, se\ simplifica:$ $\mathbf{m = 1} \rightarrow Respuesta$	

Para calcular el ángulo de inclinación, se hace a través del ángulo de la tangente: $\tan^{-1}(1) \rightarrow$ $\alpha = 45°$	

Conclusión: la pendiente de este ejercicio es 1, corresponde a un ángulo agudo de 45° y por lo tanto, el tipo de pendiente es positiva.

Ejemplo 3: Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (-3, -2) y B (4, -2)

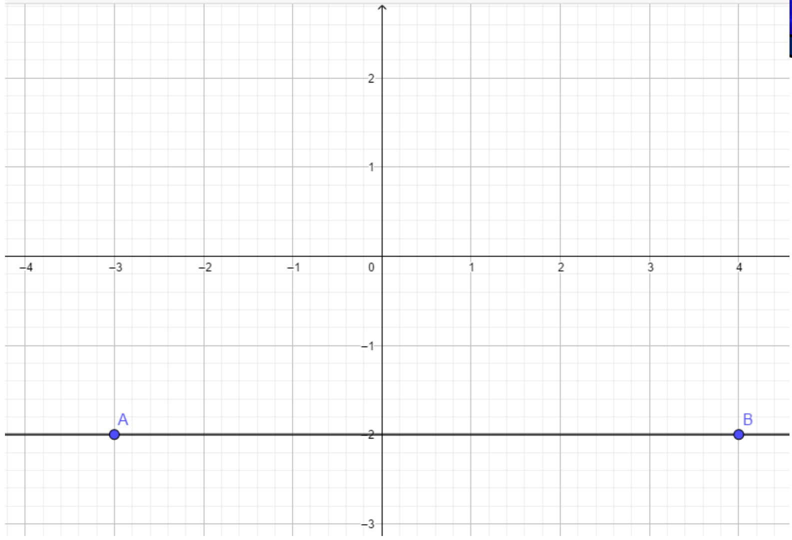
Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y":

M $\overset{x_1, y_1}{(-3, -2)}$ y N $\overset{x_2, y_2}{(4, -2)}$

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \dfrac{-2-(-2)}{4-(-3)} \rightarrow$ $m = \dfrac{-2+2}{4+3} \rightarrow$ $m = \dfrac{0}{7} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = 0} \rightarrow Respuesta$	

Para calcular el ángulo de inclinación, se hace a través del ángulo de la tangente: $\tan^{-1}(0) \rightarrow \alpha = 0°$	

<u>Conclusión:</u> la pendiente de este ejercicio es 0, corresponde a un ángulo agudo de 0° y por lo tanto, el tipo de pendiente es nula.

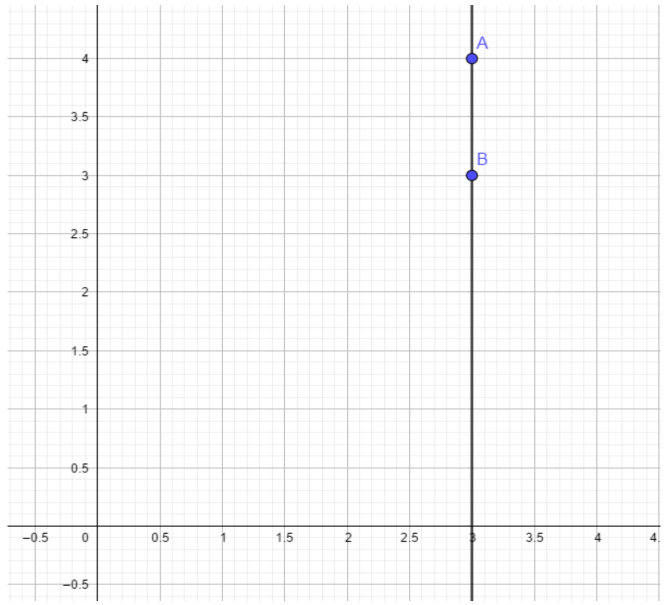
Ejemplo 4: Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (3, 4) y B (3, 3)

<u>Solución:</u>

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”:

M $\overset{x_1, y_1}{(3, 4)}$ y N $\overset{x_2, y_2}{(3, 3)}$

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{3-4}{3-3} \rightarrow$ $m = \frac{-1}{0} \rightarrow$ $\boldsymbol{m =} \infty \rightarrow Respuesta$ Para calcular el ángulo de inclinación, se hace a través del ángulo de la tangente. En este caso, no se puede dividir por cero y nos dará una pendiente indefinida.	

<u>Conclusión:</u> la pendiente de este ejercicio se considera indefinida o nula.

PUNTOS COLINEALES:

Cuando la pendiente de AB es la misma que la de AC, los tres puntos están situados sobre la misma recta, por lo tanto, los puntos se consideran colineales.

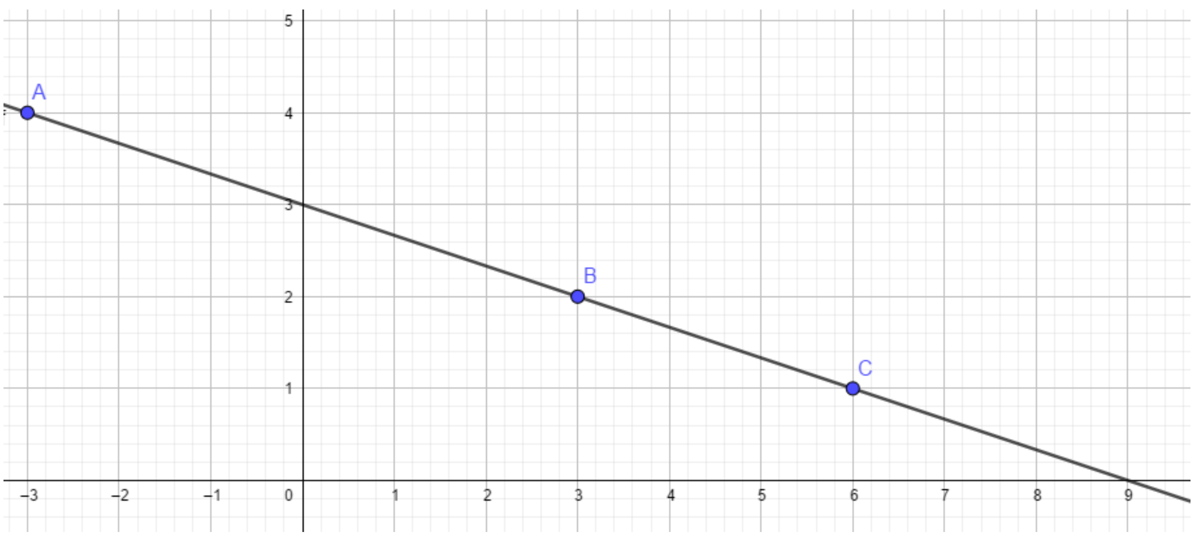
Ejemplo 5: Demostrar que los puntos A (-3, 4), B (3, 2) y C (6, 1) son colineales.

<u>Solución:</u>

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”. Posteriormente, se calcula la pendiente entre los puntos A – B, A – C, B – C. Si las tres respuestas arrojan el mismo resultado, se considera que los puntos son colineales.

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

M (A – B)	M (A – C)	M (B – C)
x_1, y_1 x_2, y_2 A (-3, 4) y B (3, 2) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{2-4}{3-(-3)} \rightarrow$ $m = \frac{-2}{3+3} \rightarrow$ $\boldsymbol{m =} \frac{-2}{6} \rightarrow \boldsymbol{m = \frac{-1}{3}}$	x_1, y_1 x_2, y_2 A (-3, 4) y C (6, 1) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{1-4}{6-(-3)} \rightarrow$ $m = \frac{-3}{6+3} \rightarrow$ $\boldsymbol{m =} \frac{-3}{9} \rightarrow \boldsymbol{m = \frac{-1}{3}}$	x_1, y_1 x_2, y_2 A (3, 2) y C (6, 1) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{1-2}{6-3} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \frac{-1}{3}}$



<u>Conclusión:</u> los puntos pueden considerarse colineales, teniendo en cuenta que están contenidos en la misma recta, determinándose también con el mismo valor de la pendiente. Pendiente negativa, que corresponde a un ángulo obtuso.

RECTAS PARALELAS

Dos rectas no verticales son paralelas, sí y solamente sí, sus pendientes son iguales.

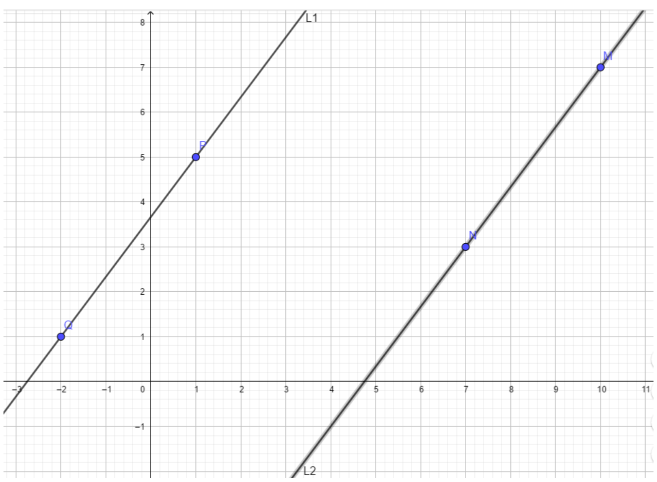
Ejemplo 6: Determinar si la recta L1 que pasa por los puntos P (1,5) y Q (-2,1) es paralela a la recta L2 que pasa por los puntos M (10,7) y N (7,3)

Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”. Posteriormente, se calcula la pendiente entre los puntos de cada recta. Si las pendientes de ambas rectas dan el mismo resultado, entonces, se consideran que son paralelas.

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

Recta L1:	Recta L2:
M (P – Q) x_1, y_1 x_2, y_2 P (1, 5) y Q (-2, 1) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{1-5}{-2-1} \rightarrow$ $m = \frac{-4}{-3} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \frac{4}{3}}$	M (M – N) x_1, y_1 x_2, y_2 M (10, 7) y N (7, 3) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{3-7}{7-10} \rightarrow$ $m = \frac{-4}{-3} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \frac{4}{3}}$



Conclusión: Como se puede observar en la gráfica, las rectas son paralelas, quedan frente a frente y por más que se prolongan nunca se van a cruzar. Igualmente, los resultados de las pendientes dieron el mismo resultado (4/3).

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas no verticales son perpendiculares, sí y solamente sí, el producto (multiplicación) de sus pendientes es igual a menos uno (-1).

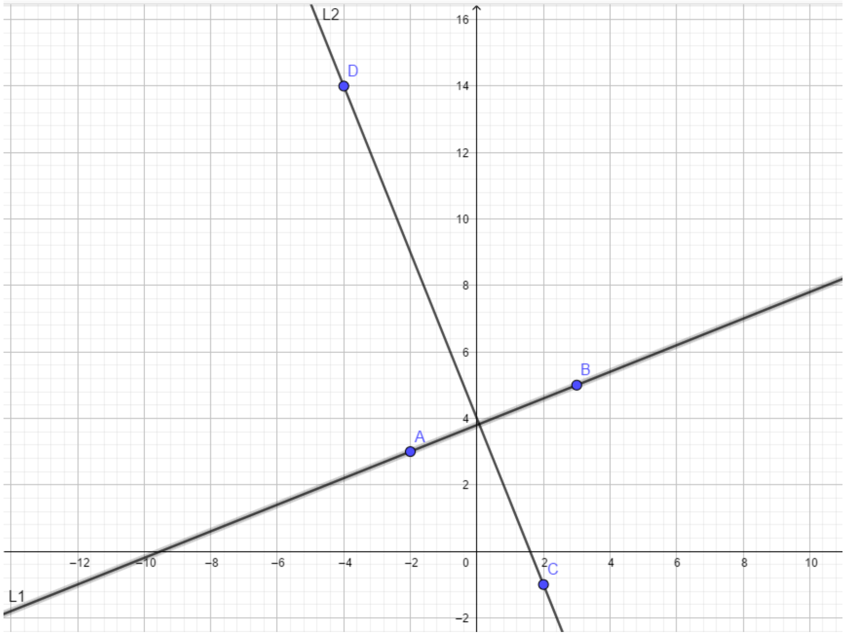
Ejemplo 7: Determinar si la recta L1 que pasa por los puntos A (-2, 3) y B (3, 5) es perpendicular a la recta L2 que pasa por los puntos C (2, -1) y D (-4, 14).

Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje “X” y el segundo número al eje “Y”. Posteriormente, se calcula la pendiente entre los puntos de cada recta. Si al multiplicar los resultados de ambas pendientes, el producto da como resultado -1, se considera que estas rectas son perpendiculares.

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

Recta L1:	Recta L2:
M (A – B) $\underset{}{A}\ \overset{x_1, y_1}{(-2, 3)}$ y $B\ \overset{x_2, y_2}{(3, 5)}$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{5-3}{3-(-2)} \rightarrow$ $m = \frac{2}{3+2} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \frac{2}{5}}$	M (C – D) $C\ \overset{x_1, y_1}{(2, -1)}$ y $D\ \overset{x_2, y_2}{(-4, 14)}$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$ $m = \frac{14-(-1)}{-4-2} \rightarrow$ $m = \frac{14+1}{-6} \rightarrow m = \frac{15}{-6} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \frac{5}{-2}}$
Se calcula el producto de ambas pendientes: $\frac{2}{5}\ x\ \frac{5}{-2} = \frac{10}{-10} = \boldsymbol{-1}$	



Conclusión: Como se puede observar en la gráfica, las rectas son perpendiculares, se cortan formando un ángulo recto (90°). Igualmente, el producto de los resultados de las pendientes es igual a -1.

Ejemplo 8: Dadas las rectas L1 que pasa por los puntos P1 (2, -2) y P2 (6, 0) y la recta L2 que pasa por los puntos P3 (2, 11) y P4 (6, 13). ¿qué clase de rectas son?

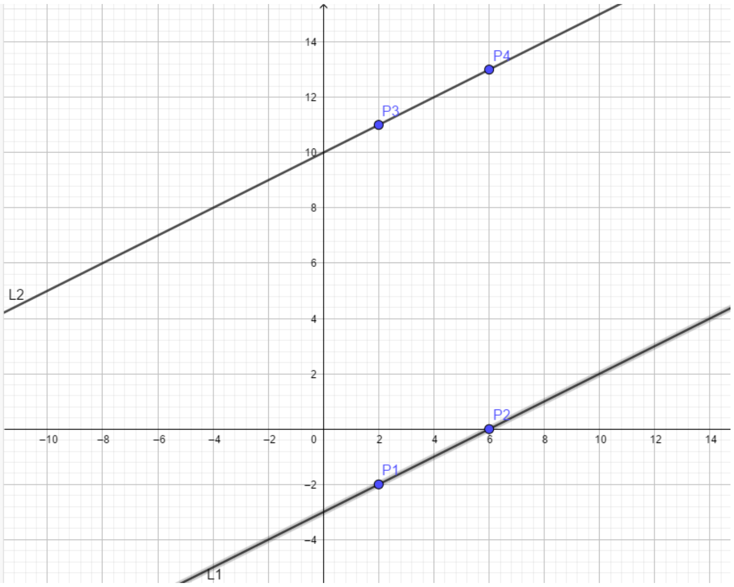
Solución:

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y". Posteriormente, se calcula la pendiente entre los puntos de cada recta. Si los resultados de las pendientes de ambas rectas dan el mismo resultado, las rectas se consideran paralelas. Si los resultados de las pendientes son diferentes y al multiplicarlos, el producto da como resultado -1, se considera que estas rectas son perpendiculares.

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

Recta L1:	Recta L2:
M (P1 – P2)	M (P3 – P4)
x_1, y_1 x_2, y_2	x_1, y_1 x_2, y_2
P1 (2, -2) y P2 (6, 0)	P3 (2, 11) y P4 (6, 13)
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$
$m = \dfrac{0-(-2)}{6-2} \rightarrow$	$m = \dfrac{13-11}{6-2} \rightarrow$

$m = \frac{0+2}{4} \rightarrow m = \frac{2}{4} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$	$m = \frac{2}{4} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$



<u>Conclusión:</u> Como se puede observar en la gráfica, las rectas son paralelas, quedan frente a frente y por más que se prolongan nunca se van a cruzar. Igualmente, los resultados de las pendientes dieron el mismo resultado (1/2).

Ejemplo 9: Dadas las rectas L1 que pasa por los puntos P1 (-3, -4) y P2 (5, 2) y la recta L2 que pasa por los puntos P3 (-2, 5) y P4 (4, -3). ¿qué clase de rectas son?

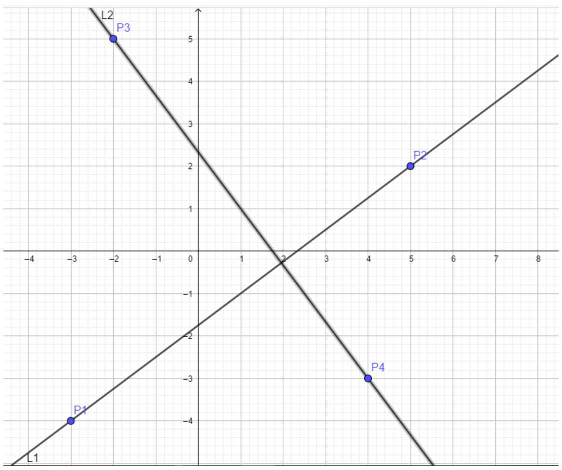
<u>Solución:</u>

Se establecen las coordenadas en cada uno de los puntos, el primer número corresponde al eje "X" y el segundo número al eje "Y". Posteriormente, se calcula la pendiente entre los puntos de cada recta. Si al multiplicar los resultados de ambas pendientes, el producto da como resultado -1, se considera que estas rectas son perpendiculares.

Se reemplazan estas coordenadas en la fórmula de la pendiente.

Recta L1: M (P1 – P2) x_1, y_1 x_2, y_2 P1 (-3, -4) y P2 (5, 2) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$	Recta L2: M (P3 – P4) x_1, y_1 x_2, y_2 P3 (-2, 5) y P4 (4, -3) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow$

$m = \frac{2-(-4)}{5-(-3)} \rightarrow$ $m = \frac{2+4}{5+3} \rightarrow m = \frac{6}{8}$ $\boldsymbol{m = \frac{3}{4}}$	$m = \frac{-3-5}{4-(-2)} \rightarrow$ $m = \frac{-8}{4+2} \rightarrow m = \frac{-8}{6} \rightarrow$ $\boldsymbol{m = \frac{-4}{3}}$
Se calcula el producto de ambas pendientes: $\frac{3}{4}\ x\ \frac{-4}{3} = \frac{-12}{12} = \boldsymbol{-1}$	



Conclusión: Como se puede observar en la gráfica, las rectas son perpendiculares, se cortan formando un ángulo recto (90°). Igualmente, el producto de los resultados de las pendientes es igual a -1.

ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN No.2

Haciendo uso del concepto de pendiente de la recta y rectas paralelas y perpendiculares, dar solución a los siguientes ejercicios y representar gráficamente los puntos de coordenadas.

1. Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (-8,-4) y B (5, 9). Graficar y determinar qué clase de pendiente es.
2. Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (10,-3) y B (14, -7). Graficar y determinar qué clase de pendiente es.
3. Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (8, 6) y B (14, 6). Graficar y determinar qué clase de pendiente es.
4. Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (5,5) y B (-2, -3). Graficar y determinar qué clase de pendiente es.

5. Determinar si los siguientes puntos son colineales: A (1,1), B (-2, -2) y C (3,3). Representar gráficamente.
6. Establecer si las parejas de rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las anteriores: L1: A (-4, 1) B (2,6); L2: C (2,4) D (-1, -3).
7. Establecer si las parejas de rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las anteriores: L1: A (4, 4) B (-3,-3); L2: C (-5,5) D (4, -4).
8. Establecer si las parejas de rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las anteriores: L1: A (2, 8) B (0,2); L2: C (1,2) D (-2, -7).

ECUACIÓN DE LA RECTA

DEFINICIÓN: Una ecuación de la recta se puede encontrar de diversas formas, dependiendo de la información que se tenga. Una recta queda bien determinada cuando se conoce su ecuación definida en las variables "X" y "Y", de tal manera que sea de primer grado.

PUNTOS EN LA RECTA: cuando al reemplazar las coordenadas se obtiene una igualdad, el punto sí pertenece a la recta.

EJEMPLOS:

1. Sea la recta L, cuya ecuación es 2X – 3Y= 6, comprobar que el punto (-3, -4) pertenece a la recta y graficar.

Solución:

$Punto = (-3, -4) \rightarrow X = -3, Y = -4$

Se reemplaza en la ecuación:

$2x - 3y = 6$

$2(-3) - 3(-4) = 6$

$-6 - 12 = 6$

$6 = 6$ Sí pertenecen los puntos a la recta

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

X	Y
0	-2
3	**0**

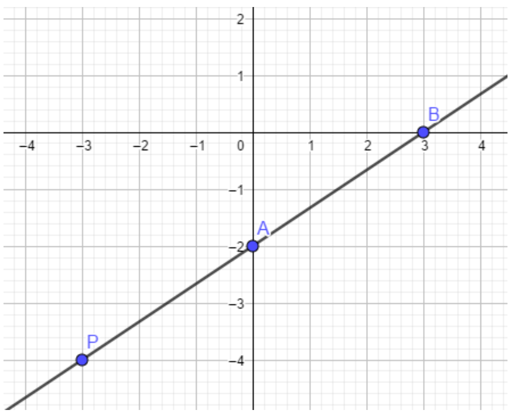
Cuando “X” vale 0:

$$2x - 3y = 6$$
$$2(0) - 3y = 6$$
$$0 - 3y = 6$$
$$-3y = 6$$
$$y = \frac{6}{-3} \rightarrow y = \mathbf{-2}$$

Cuando “Y” vale 0:

$$2x - 3y = 6$$
$$2x - 3(0) = 6$$
$$2x - 0 = 6$$
$$2x = 6$$
$$x = \frac{6}{2} \rightarrow y = \mathbf{3}$$

Finalmente se traza la recta y se ubica el punto P(-3,-4)



2. Determinar si los siguientes puntos pertenecen a la recta $Y = \frac{3}{4}x - 1.$ Graficar

A (0,0) B. (4,2) C. (0,-1) D. (-1, -7/4)

Solución:

$Punto\ A\ (0,0) \rightarrow X = 0, Y = 0$

Se reemplaza en la ecuación:

$$Y = \frac{3}{4}x - 1$$

$$0 = \frac{3}{4}(0) - 1$$

$$0 = 0 - 1$$

$0 = -1$ **No** pertenece el punto A a la recta

$Punto\ B\ (4,2) \rightarrow X = 4, Y = 2$

Se reemplaza en la ecuación:

$Y = \frac{3}{4}x - 1$

$2 = \frac{3}{4}(4) - 1, se\ puede\ simplificar\ el\ 4, cancelando\ en\ el\ numerador\ y\ denominador$

$2 = 3 - 1$

$2 = 2$ **Sí** pertenece el punto B a la recta

$Punto\ C\ (0, -1) \rightarrow X = 0, Y = -1$

Se reemplaza en la ecuación:

$Y = \frac{3}{4}x - 1$

$-1 = \frac{3}{4}(0) - 1$

$-1 = 0 - 1$

$-1 = -1$ **Sí** pertenece el punto C a la recta

$Punto\ D\ \left(-1, \frac{-7}{4}\right) \rightarrow X = -1, Y = \frac{-7}{4}$

Se reemplaza en la ecuación:

$$\frac{-7}{4} = \frac{3}{4}(-1) - 1$$

$$\frac{-7}{4} = \frac{-3}{4} - \frac{1}{1} \rightarrow \frac{-7}{4} = \frac{-3-4}{4} \rightarrow$$

$\frac{-7}{4} = \frac{-7}{4}$ **Sí** pertenece el punto D a la recta

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

X	Y
0	-1
4/3	**0**

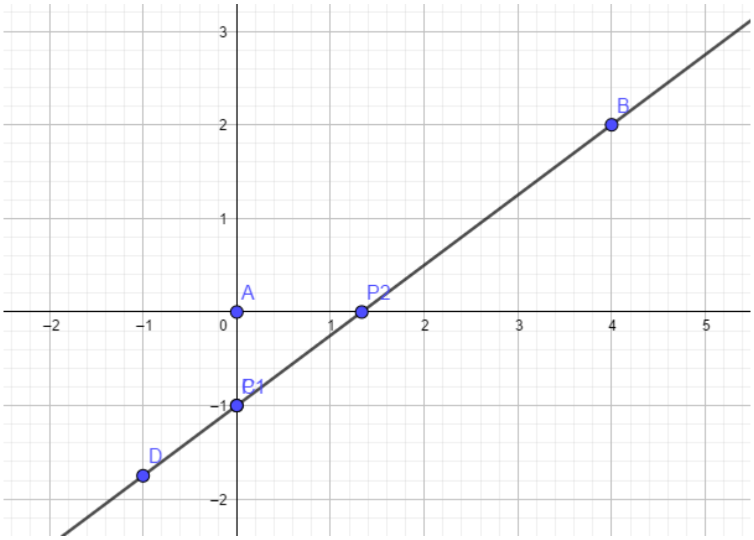
Cuando “X” vale 0:

$$y = \frac{3}{4}x - 1$$
$$y = \frac{3}{4}(0) - 1$$
$$y = 0 - 1$$
$$y = \mathbf{-1}$$

Cuando “Y” vale 0:

$$y = \frac{3}{4}x - 1$$
$$0 = \frac{3}{4}x - 1$$
$$0 + 1 = \frac{3}{4}x$$
$$x = 1 \div \frac{3}{4}$$
$$x = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

Finalmente se traza la recta y se ubican los puntos



ECUACIÓN DE LA RECTA CUANDO SE CONOCE LA PENDIENTE Y UN PUNTO (FORMA PUNTO – PENDIENTE)

Una recta en particular tiene una pendiente dada, pasa por un número infinito e intercepta a cada uno de los ejes coordenados en un punto específico. Conocidas dos cualesquiera de estas condiciones, es posible determinar la ecuación de la recta que las cumple.

Para hallar la ecuación de la recta punto-pendiente se despejan los valores de la ecuación de pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1)$$

Finalmente, la ecuación se planteará de la siguiente manera: $y - y_1 = m\,(x - x_1)$, es importante tener en cuenta que se puede seleccionar el punto 1 o el punto 2 para aplicarlos en la ecuación.

EJEMPLOS:

1. Determinar la ecuación de la recta de pendiente -5 y que pasa por el punto (1, -2). Realizar la gráfica.

Solución:

Se determina la información básica que proporciona el ejercicio, m= - 5 punto A (1, -2), X1= 1, Y1= -2.

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$

$$y - (-2) = -5\,(x - 1) \rightarrow$$

$$y + 2 = -5x + 5 \rightarrow$$

$$y = -5x + 5 - 2 \rightarrow \boldsymbol{y = -5x + 3}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

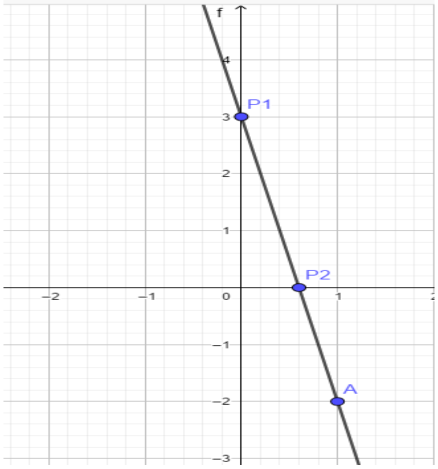
X	Y
0	3
3/5	**0**

Cuando "X" vale 0:

$$y = -5x + 3$$
$$y = -5(0) + 3$$
$$y = 0 + 3$$
$$y = \mathbf{3}$$

Cuando "Y" vale 0:

$$y = -5x + 3$$
$$0 = -5x + 3$$
$$0 - 3 = -5x$$
$$x = \frac{-3}{-5}$$
$$x = \mathbf{\frac{3}{5}}$$



2. Determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y pasa por el punto A (11,-8)

Solución:

Se determina la información básica que proporciona el ejercicio, m= - 3 punto A (11, -8), X1= 11, Y1= -8.

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$

$$y - (-8) = -3\,(x - 11) \rightarrow$$

$$y + 8 = -3x + 33 \rightarrow$$

$$y = -3x + 33 - 8 \rightarrow \boldsymbol{y = -3x + 25}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

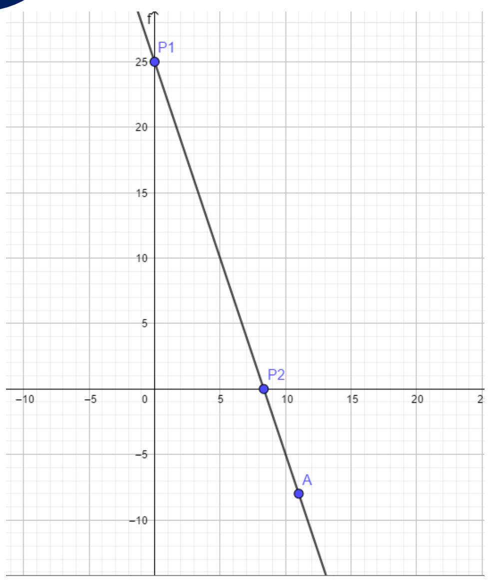
X	Y
0	25
25/3	**0**

Cuando "X" vale 0:

$$y = -3x + 25$$
$$y = -3(0) + 25$$
$$y = 0 + 25$$
$$y = \mathbf{25}$$

Cuando "Y" vale 0:

$$y = -3x + 25$$
$$0 = -3x + 25$$
$$0 - 25 = -3x$$
$$x = \frac{-25}{-3}$$
$$x = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{3}}$$



3. Determinar la ecuación de la recta de pendiente m= - 6, que pasa por el punto A (3, -2)

<u>Solución:</u>

Se determina la información básica que proporciona el ejercicio, m= - 6 punto A (3, -2), X1= 3, Y1= - 2.

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$

$$y - (-2) = -6\,(x - 3) \rightarrow$$

$$y + 2 = -6x + 18 \rightarrow$$

$$y = -6x + 18 - 2 \rightarrow \boldsymbol{y = -6x + 16}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

X	Y
0	16
8/3	**0**

Cuando "X" vale 0:

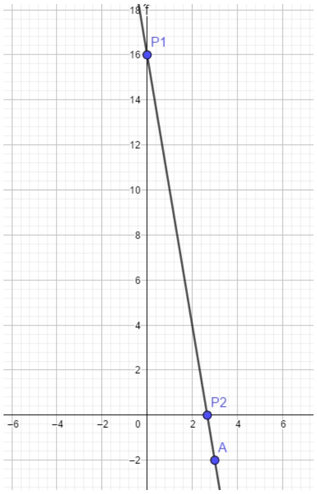
$$y = -6x + 16$$
$$y = -6(0) + 16$$
$$y = 0 + 16$$
$$y = 16$$

Cuando "Y" vale 0:

$$y = -6x + 16$$
$$0 = -6x + 16$$
$$0 - 16 = -6x$$

$$x = \frac{-16}{-6}$$

$$x = \mathbf{\frac{8}{3}}$$



4. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (5, -1) y pendiente 1/2.

Solución:

Se determina la información básica que proporciona el ejercicio, m= 1/2 punto A (5, -1), X1= 5, Y1= - 1.

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$

$$y - (-1) = \frac{1}{2}\,(x - 5) \rightarrow$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} - \frac{1}{1}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5-2}{2} \rightarrow \mathbf{y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

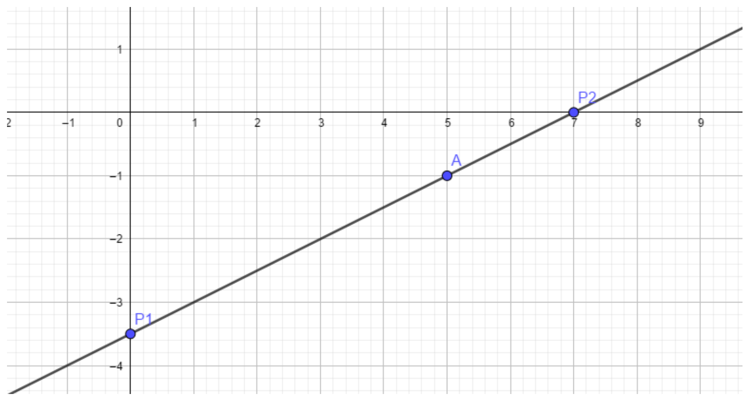
X	Y
0	-7/2
7	**0**

Cuando "X" vale 0:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}(0) - \frac{7}{2}$$
$$y = 0 - \frac{7}{2}$$
$$y = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$$

Cuando "Y" vale 0:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$
$$0 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$
$$0 + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}x$$
$$x = \frac{7}{2} \div \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{14}{2}$$
$$x = \mathbf{7}$$



ECUACIÓN DE LA RECTA CONOCIDOS DOS PUNTOS, PERO NO LA PENDIENTE

Si se sabe que una recta L pasa por los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, es posible encontrar la ecuación de la recta hallando la pendiente de la recta y posteriormente aplicando la forma punto – pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1)$$

EJEMPLOS:

1. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (2, -1) y B (1, -5)

Solución:

En primer lugar se calcula la pendiente teniendo en cuenta los puntos que plantea el ejercicio: A (2, -1), X1=2, Y1= -1, B (1, -5), X2= 1, Y2= -5

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{-5-(-1)}{1-2} \rightarrow m = \frac{-5+1}{-1} \rightarrow m = \frac{-4}{-1} \rightarrow \boldsymbol{m = 4}$$

Para calcular la ecuación se reemplazan los valores de pendiente y se selecciona uno de los puntos, en este caso se tomará el punto A (2, -1) y la pendiente obtenida que fue 4.

m= 4   punto A (2, -1),   X1= 2, Y1= - 1.

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$

$$y - (-1) = 4\,(x - 2) \rightarrow$$

$$y + 1 = 4x - 8 \rightarrow$$

$$y = 4x - 8 - 1 \rightarrow \boldsymbol{y = 4x - 9}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

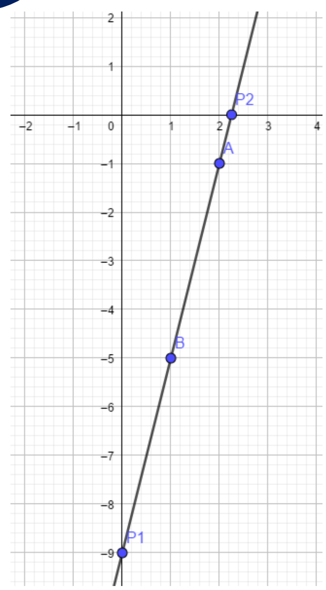
X	Y
0	-9
9/4	**0**

Cuando "X" vale 0:

$$y = 4x - 9$$
$$y = 4(0) - 9$$
$$y = 0 - 9$$
$$y = \boldsymbol{-9}$$

Cuando "Y" vale 0:

$$y = 4x - 9$$
$$0 = 4x - 9$$
$$0 + 9 = 4x$$
$$x = \boldsymbol{\frac{9}{4}}$$



2. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (3, -2) y B (2, -5). Calcular 2 puntos de referencia y realizar gráfica.

Solución:

En primer lugar, se calcula la pendiente teniendo en cuenta los puntos que plantea el ejercicio: A (3, -2), X1=3, Y1= -2, B (2, -5), X2= 2, Y2= -5

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \to m = \frac{-5-(-2)}{2-3} \to m = \frac{-5+2}{-1} \to m = \frac{-3}{-1} \to \boldsymbol{m = 3}$$

Para calcular la ecuación se reemplazan los valores de pendiente y se selecciona uno de los puntos, en este caso se tomará el punto A (3, -2) y la pendiente obtenida que fue 3.

m= 3 punto A (3, -2), X1= 3, Y1= - 2

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \to$$

$$y - (-2) = 3\,(x-3) \to$$

$$y + 2 = 3x - 9 \to$$

$$y = 3x - 9 - 2 \to \boldsymbol{y = 3x - 11}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

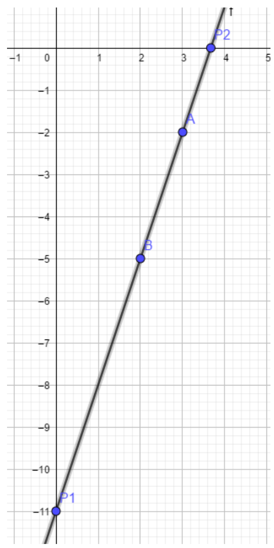
X	Y
0	-11
11/3	**0**

Cuando “X” vale 0:

$$y = 3x - 11$$
$$y = 3(0) - 11$$
$$y = 0 - 11$$
$$y = \mathbf{-11}$$

Cuando “Y” vale 0:

$$y = 3x - 11$$
$$0 = 3x - 11$$
$$0 + 11 = 3x$$
$$x = \mathbf{\frac{11}{3}}$$



3. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (3, -1) y B (-2, -3). Calcular puntos de referencia y realizar gráfica.

Solución:

En primer lugar, se calcula la pendiente teniendo en cuenta los puntos que plantea el ejercicio:
A (3, -1), X1=3, Y1= -1, B (-2, -3), X2= -2, Y2= -3

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{-3-(-1)}{-2-3} \rightarrow m = \frac{-3+1}{-5} \rightarrow m = \frac{-2}{-5} \rightarrow \boldsymbol{m = \frac{2}{5}}$$

Para calcular la ecuación se reemplazan los valores de pendiente y se selecciona uno de los puntos, en este caso se tomará el punto A (3, -1) y la pendiente obtenida que fue 2/5.

m= 2/5 punto A (3, -1), X1= 3, Y1= - 1

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$

$$y - (-1) = \frac{2}{5}\,(x - 3) \rightarrow$$

$$y + 1 = \frac{2}{5}x - \frac{6}{5} \rightarrow y = \frac{2}{5}x - \frac{6}{5} - \frac{1}{1}$$

$$y = \frac{2}{5}x - \frac{-6 - 5}{5} \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{2}{5}x - \frac{-11}{5}}$$

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

X	Y
0	-11/5
11/2	**0**

Cuando "X" vale 0:

$$y = \frac{2}{5}x - \frac{11}{5}$$

$$y = \frac{2}{5}(0) - \frac{11}{5}$$

$$y = 0 - \frac{11}{5}$$

$$y = -\boldsymbol{\frac{11}{5}}$$

Cuando "Y" vale 0:

$$y = \frac{2}{5}x - \frac{11}{5}$$

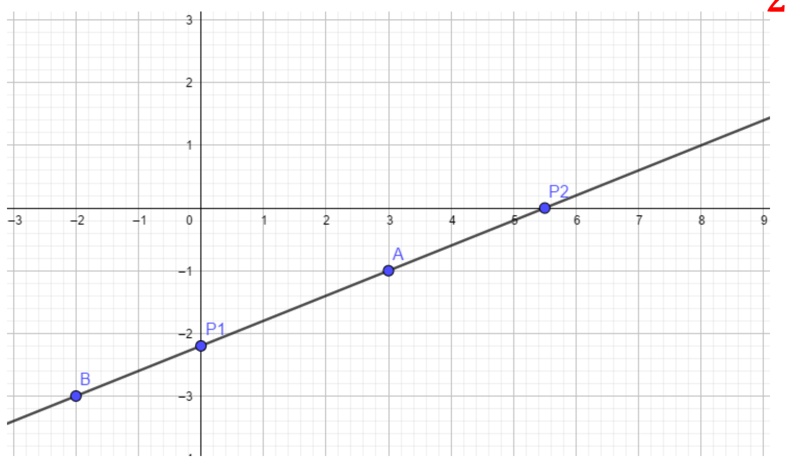
$$0 = \frac{2}{5}x - \frac{11}{5}$$

$$0 + \frac{11}{5} = \frac{2}{5}x$$

$$\frac{11}{5} \div \frac{2}{5} = x$$

$$\frac{11 \times 5}{2 \times 5} = x$$

$$x = \boldsymbol{\frac{11}{2}}$$



FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

Una ecuación en una o dos variables de primer grado igualadas a cero se llama forma general de la ecuación de la recta. Su expresión genérica es:

AX + BY + C = 0

A partir de la ecuación general de la recta se pueden obtener de manera directa los valores indicados en las siguientes expresiones:

Pendiente: $m = \frac{-A}{B}$

Abscisa al origen: $(x) = -\frac{C}{A}$

Ordenada al origen: $(y) = -\frac{C}{B}$

EJEMPLOS:

1. Hallar la ecuación general de la recta con m= -3 y A (-2, 3)

Solución:

Para calcular la ecuación se reemplazan los valores de pendiente y de las variables X e Y de acuerdo al punto:

m= -3 punto A (-2, 3), X1= -2, Y1= 3

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$
$y - 3 = -3\,(x - (-2)) \rightarrow$
$y - 3 = -3\,(x + 2)) \rightarrow$
$y - 3 = -3x - 6 \rightarrow$
Se pasan todos los valores a uno de los lados y en función de X y se igualan a cero
$y - 3 + 3x + 6 = 0 \rightarrow$
$\boldsymbol{3x + y + 3 = 0 \rightarrow Ecuación\ general}$
Ax + By + C = 0

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

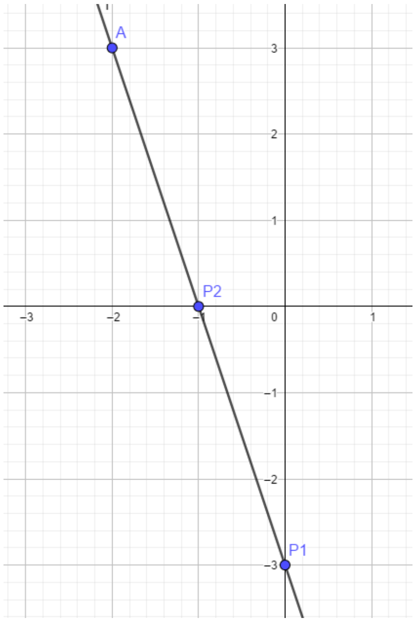
X	Y
0	-3
-1	**0**

Cuando "X" vale 0:

$$3x + y + 3 = 0$$
$$3(0) + y + 3 = 0$$
$$0 + y + 3 = 0$$
$$y + 3 = 0$$
$$\boldsymbol{y = -3}$$

Cuando "Y" vale 0:

$$3x + y + 3 = 0$$
$$3x + 0 + 3 = 0$$
$$3x + 3 = 0$$
$$3x = -3$$
$$x = \frac{-3}{3}$$
$$\boldsymbol{x = -1}$$



Ecuación general:

AX + By + C = 0

3x + y + 3 = 0

A= 3, B= 1, C= 3

Ordenada (eje Y)=

$$y = \frac{-C}{B} \rightarrow y = \frac{-3}{1} \rightarrow y = -3$$

Abscisa (eje X)=

$$x = \frac{-C}{A} \rightarrow x = \frac{-3}{3} \rightarrow x = -1$$

2. Encontrar la ecuación general de la recta con m= $\frac{1}{2}$ y el punto A (5, -1). Realizar gráfica.

Solución:

Para calcular la ecuación se reemplazan los valores de pendiente y de las variables X e Y de acuerdo al punto:

m= $\frac{1}{2}$ punto A (5, -1), X1= 5, Y1= -1

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$
$$y - (-1) = \frac{1}{2}\,(x - 5) \rightarrow$$
$$y + 1 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \rightarrow$$
$$y + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \rightarrow$$
$$y + 1 = \frac{x-5}{2} \rightarrow se\ realiza\ el\ producto\ de\ extremos\ por\ medios$$
$$2y + 2 = x - 5 \rightarrow$$

Se pasan todos los valores a uno de los lados y en función de X y se igualan a cero

$$0 = x - 5 - 2y - 2 \rightarrow$$
$$\boldsymbol{x - 2y - 7 = 0 \rightarrow Ecuación\ general}$$

Ax + By + C = 0

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

X	Y
0	-7/2
7	**0**

Cuando "X" vale 0:

$$x - 2y - 7 = 0$$
$$0 - 2y - 7 = 0$$
$$-2y = 0 + 7$$
$$y = \frac{7}{-2}$$
$$\boldsymbol{y = -\frac{7}{2}}$$

Cuando "Y" vale 0:

$$x - 2y - 7 = 0$$
$$x - 2(0) - 7 = 0$$
$$x - 0 - 7 = 0$$
$$x - 7 = 0$$
$$x = 0 + 7$$
$$\boldsymbol{x = 7}$$

Ecuación general:

AX + By + C = 0

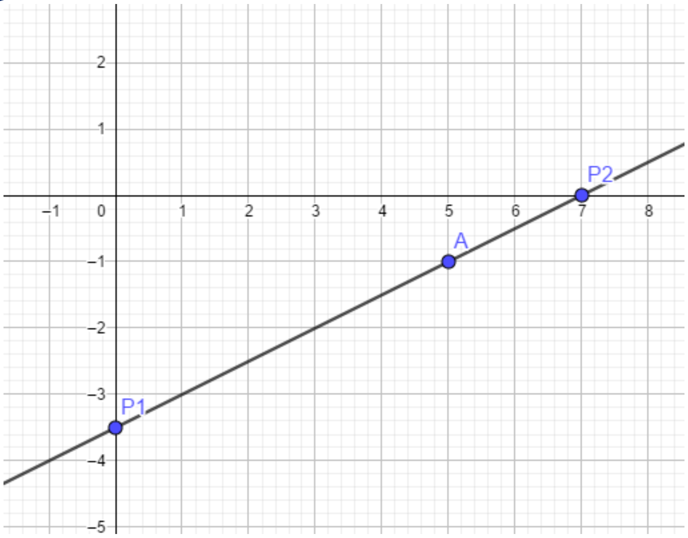
x - 2y - 7 = 0

A= 1, B= -2, C= -7

Ordenada (eje Y)=

$$y = \frac{-C}{B} \rightarrow y = \frac{-(-7)}{-2} \rightarrow y = \frac{7}{-2} \rightarrow -\frac{7}{2}$$

Abscisa (eje X)=



3. Encontrar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A (3, -5) y B (-2, 6). Realizar gráfica.

Solución:

Para calcular la ecuación primero se calcula la pendiente de acuerdo a los puntos dados.

A (3, - 5) X1=3, Y1= -5 B (-2, 6) X2= -2, Y2= 6

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{6-(-5)}{-2-3} \rightarrow m = \frac{6+5}{-5} \rightarrow m = \frac{11}{-5} \rightarrow \boldsymbol{m = \frac{-11}{5}}$$

Se reemplazan los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \rightarrow$$
$$y-(-5) = \frac{-11}{5}\,(x-3) \rightarrow$$
$$y+5 = \frac{-11}{5}\,(x-3) \rightarrow$$
$$y+5 = \frac{-11}{5}x + \frac{33}{5} \rightarrow$$
$$y+5 = \frac{-11x+33}{5} \rightarrow \textit{se realiza el producto de extremos por medios}$$
$$5y+25 = -11x+33 \rightarrow$$

Se pasan todos los valores a uno de los lados y en función de X y se igualan a cero

$5y + 25 + 11x - 33 = 0 \rightarrow$

$\mathbf{11x + 5y - 8 = 0 \rightarrow \textit{Ecuación general}}$

Ax + By + C = 0

Para trazar la recta se asignan valores a X y a Y haciendo uso de la siguiente tabla y se reemplazan los valores en la ecuación para completar la tabla:

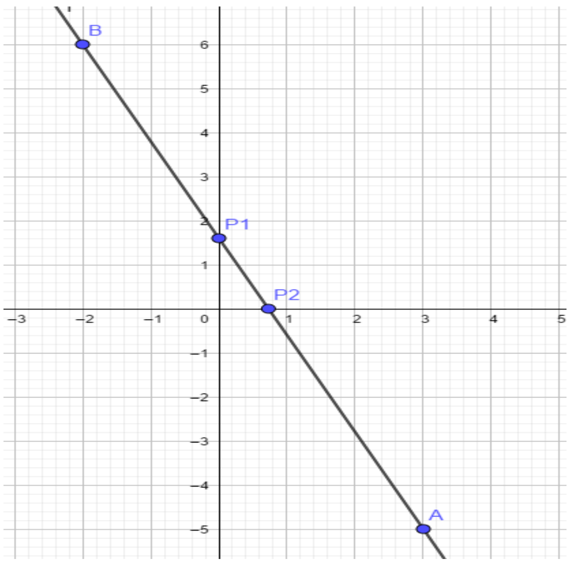
X	Y
0	8/5
8/11	**0**

Cuando "X" vale 0:

$11x + 5y - 8 = 0$
$11(0) + 5y - 8 = 0$
$0 + 5y - 8 = 0$
$5y = 0 + 8$
$\boldsymbol{y = \frac{8}{5}}$

Cuando "Y" vale 0:

$11x + 5y - 8 = 0$
$11x + 5(0) - 8 = 0$
$11x + 0 - 8 = 0$
$11x - 8 = 0$
$11x = 0 + 8$
$11x = 8$
$\boldsymbol{x = \frac{8}{11}}$



Ecuación general:

AX + By + C = 0

11x + 5y - 8 = 0

A= 11, B= 5, C= -8

Ordenada (eje Y)=

$b = \frac{-C}{B} \rightarrow b = \frac{-(-8)}{5} \rightarrow b = \frac{8}{5}$

Abscisa (eje X)=

$a = \frac{-C}{A} \rightarrow b = \frac{-(-8)}{11} \rightarrow b = \frac{8}{11}$

4. En la siguiente ecuación determinar la pendiente, la abscisa y ordenada. Realizar la gráfica.

$\mathbf{2x - y - 4 = 0}$

Solución:

Se extraen los valores de la ecuación

$$\mathbf{2x - y - 4 = 0}$$

AX + By + C = 0

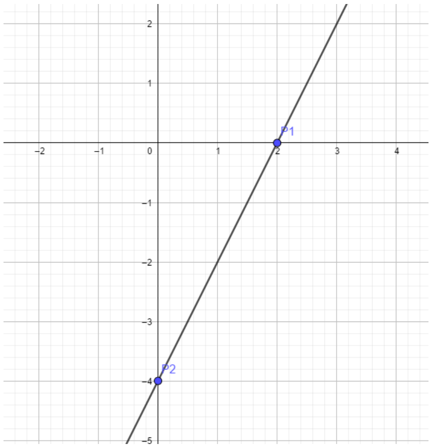
A= 2, B= -1, C= -4

Se reemplazan los anteriores valores en las expresiones:

Pendiente: $m = \frac{-A}{B} \rightarrow m = \frac{-2}{-1} \rightarrow m = 2$

Ordenada al origen: $b = -\frac{C}{B} \rightarrow b = \frac{-(-4)}{-1} \rightarrow b = \frac{4}{-1} \rightarrow b = -4$

Abscisa al origen: $a = -\frac{C}{A} \rightarrow a = \frac{-(-4)}{2} \rightarrow a = \frac{4}{2} \rightarrow a = 2$



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

Haciendo uso de los conceptos de ecuación de la recta, dar solución a los siguientes ejercicios y representar gráficamente los puntos de coordenadas.

1. Determinar si los puntos dados en cada caso pertenecen o no a la recta Y= 2x + 3

   A (-3, 3) B (0,3) C (-1, 1)

2. En los siguientes ejercicios encontrar la ecuación de la recta y representar gráficamente.

a) Pasa por el punto (2,0) y tiene pendiente 2.

b) Pasa por el punto (2,1) y tiene pendiente 1

3. Calcular la pendiente y graficar la ecuación y= x + 5

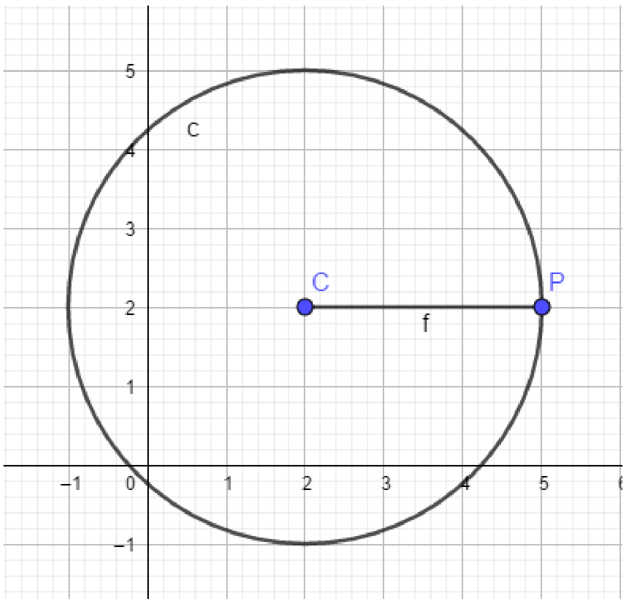
4. Graficar la ecuación y= -2x + 3

5. Escribir la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A (1, 0) y B (3,6)

LA CIRCUNFERENCIA

Conceptos básicos:

<u>Definición:</u> La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. La distancia fija se llama radio de la circunferencia.



ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Para determinar un punto sobre una circunferencia es preciso tener una expresión general que indique las condiciones para todo punto P (x, y) que pertenece a la curva.

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA CUANDO SE CONOCE EL CENTRO Y EL RADIO

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

h,k= son las coordenadas del centro

EJEMPLOS:

1. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro (2, 5) y radio 3

Solución:

Se extraen los valores de referencia del centro C (2, 5), h= 2 y k= 5

Se reemplazar los valores en la ecuación:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x-2)^2 + (y-5)^2 = (3)^2 \rightarrow$

Se resuelven los productos notables:

$(x-2)^2 + (y-5)^2 = (3)^2 \rightarrow$

$(x)^2 - 2(x*2) + (2)^2 + [(y)^2 - 2(y*5) + (5)^2 = (3)^2 \rightarrow$

$x^2 - 4x + 4 + [y^2 - 10y + 25] = 9 \rightarrow$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 9$

Forma general de la ecuación de la circunferencia

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Se agrupan los términos en función de la ecuación

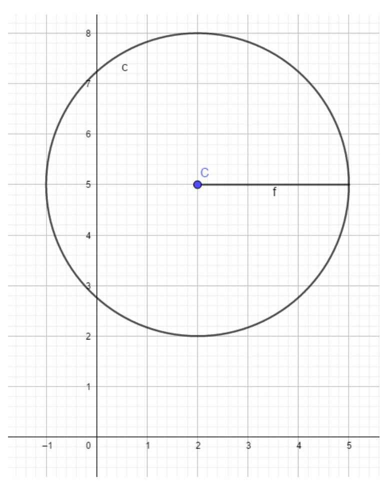
$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 - 9 = 0$

$x^2 - 4x + y^2 - 10y + 25 + 4 - 9 = 0$

$x^2 - 4x + y^2 - 10y + 20 = 0$

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$\mathbf{x^2 + y^2 - 4x - 10y + 20 = 0}$



2. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro (4,3) y radio 2. Graficar.

Solución:

Se extraen los valores de referencia del centro C (4, 3), h= 4 y k= 3

Se reemplazar los valores en la ecuación:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-4)^2+(y-3)^2=(2)^2 \rightarrow$

Se resuelven los productos notables:

$(x-4)^2+(y-3)^2=(2)^2 \rightarrow$

$(x)^2-2(x*4)+(4)^2+[(y)^2-2(y*3)+(3)^2=(2)^2 \rightarrow$

$x^2-8x+16+[y^2-6y+9]=4 \rightarrow$

$x^2-8x+16+y^2-6y+9=4$

Forma general de la ecuación de la circunferencia

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Se agrupan los términos en función de la ecuación

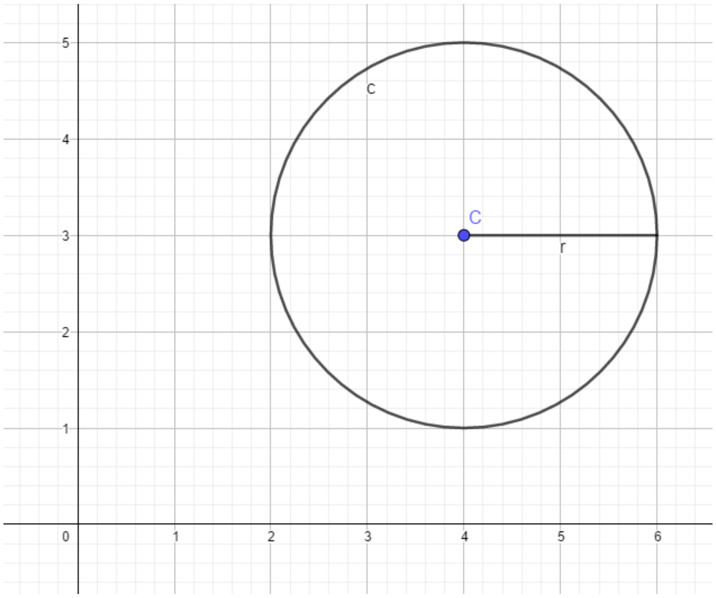
$x^2-8x+16+y^2-6y+9-4=0$

$x^2-8x+y^2-6y+9-4+16=0$

$x^2-8x+y^2-6y+21=0$

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

$\mathbf{x^2+y^2-8x-6y+21=0}$



3. Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 1. Graficar.

Solución:

Se extraen los valores de referencia del centro C (0, 0), h= 0 y k= 0

Se reemplazar los valores en la ecuación:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-0)^2+(y-0)^2=(1)^2 \rightarrow$

Se resuelven los paréntesis:

$(x)^2+(y)^2=(1)^2 \rightarrow$

$x^2+y^2=1 \rightarrow$

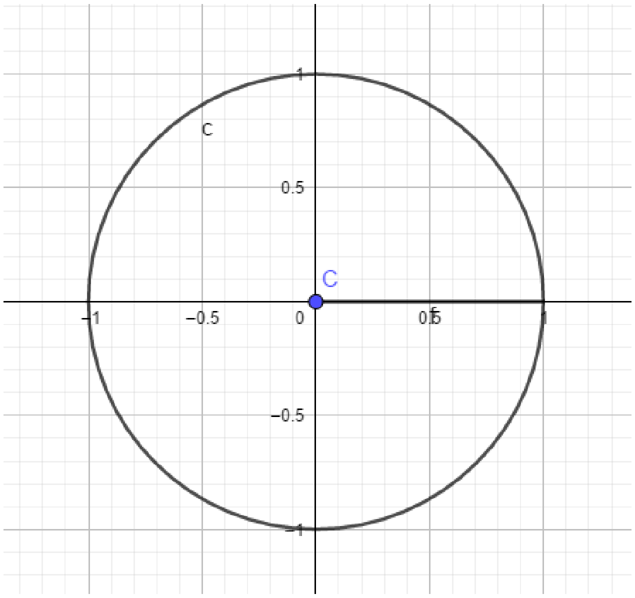
Forma general de la ecuación de la circunferencia

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Se agrupan los términos en función de la ecuación

$x^2+y^2=1$

$\mathbf{x^2+y^2-1=0}$



ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA CONOCIDOS LOS EXTREMOS DEL DIÁMETRO

1. Encontrar la ecuación de la circunferencia en la cual los extremos de su diámetro son los puntos A (-4,2) y B (6,4)

Solución:

Se calculan las coordenadas del centro, haciendo uso de los puntos medios de X e Y.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x_m = \frac{-4 + 6}{2} \rightarrow x_m = \frac{2}{2} \rightarrow x_m = 1$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow y_m = \frac{2 + 4}{2} \rightarrow y_m = \frac{6}{2} \rightarrow y_m = \mathbf{3}$$

De esta manera, el centro de la circunferencia es el punto (1, 3)

Ahora se procede a calcular el valor del radio. El radio es la distancia del centro a un punto.

R=? C (1,3) A (-4 , 2), $x_1 = 1, y_1 = 3, x_2 = -4, y_2 = 2$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow$$

$$d = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (2 - 3)^2} \rightarrow d = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} \rightarrow d = \sqrt{25 + 1} \rightarrow$$

$$d = \sqrt{26}$$

C (1,3), h=1 y k= 3, A (-4,2), r= $\sqrt{26}$

Se reemplazar los valores en la ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{26})^2 \rightarrow$$

Se resuelven los productos notables y el paréntesis con el radical:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{26})^2 \rightarrow$$

$(x)^2 - 2(x * 1) + (1)^2 + [(y)^2 - 2(y * 3) + (3)^2 = (\sqrt{26})^2 \rightarrow$

$x^2 - 2x + 1 + [y^2 - 6y + 9] = 26 \rightarrow$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 26$

Forma general de la ecuación de la circunferencia

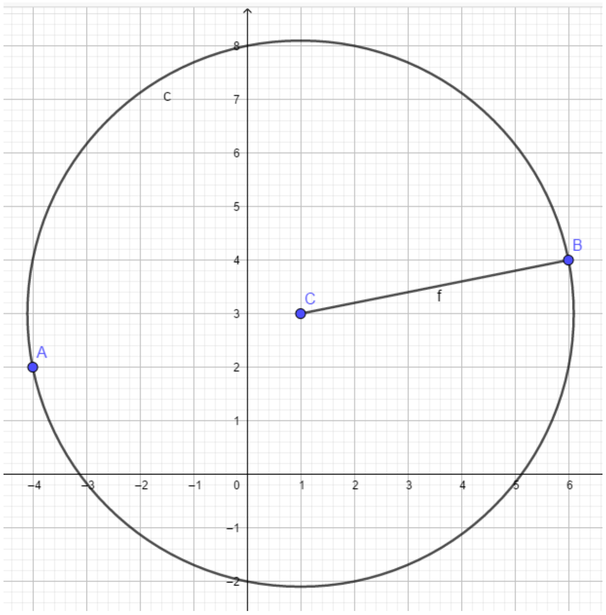
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Se agrupan los términos en función de la ecuación

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 26$

$x^2 - 2x + y^2 - 6y + 9 + 1 - 26 = 0$

$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x - 6y - 16 = 0}$



2. Encontrar la ecuación general de la circunferencia en la cual los extremos de su diámetro son los puntos A (1, -2) y B (-3, -2).

Solución:

Se calculan las coordenadas del centro, haciendo uso de los puntos medios de X e Y.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x_m = \frac{-3 + 1}{2} \rightarrow x_m = \frac{-2}{2} \rightarrow x_m = -1$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow y_m = \frac{-2 + (-2)}{2} \rightarrow y_m = \frac{-4}{2} \rightarrow y_m = -2$$

De esta manera, el centro de la circunferencia es el punto (-1, -2)

Ahora se procede a calcular el valor del radio. El radio es la distancia del centro a un punto.

R=? C (-1,-2) A (1 , -2), $x_1 = -1, y_1 = -2, x_2 = 1, y_2 = -2$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow$$

$$d = \sqrt{(1-(-1))^2 + \left(-2-(-2)\right)^2} \rightarrow d = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+2)^2} \rightarrow$$

$$d = \sqrt{(2)^2 + (0)^2} \rightarrow d = \sqrt{4} \rightarrow$$

$$d = \mathbf{2}$$

C (-1,-2), h=-1 y k= -2, A (1,-2), r= 2

Se reemplazar los valores en la ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-(-1))^2 + (y-(-2))^2 = (2)^2 \rightarrow$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = (2)^2 \rightarrow$$

Se resuelven los productos notables:

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = (2)^2 \rightarrow$$

$$(x)^2 + 2(x*1) + (1)^2 + [(y)^2 + 2(y*2) + (2)^2 = (2)^2 \rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 + [y^2 + 4y + 4] = 4 \rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 = 0 \rightarrow$$

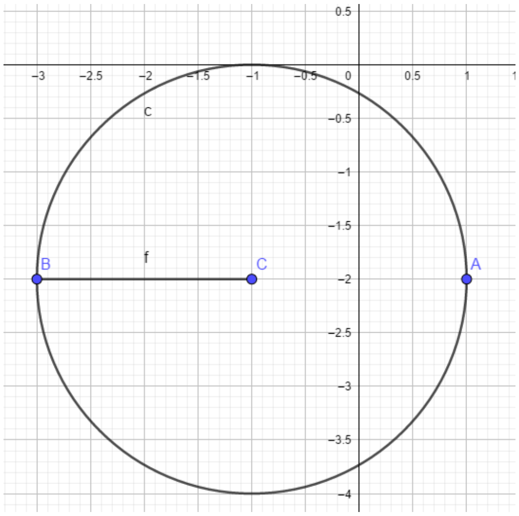
$$x^2 + 2x + y^2 + 4y + 4 - 4 + 1 = 0 \rightarrow Se\ hace\ reducción\ de\ términos\ semejantes$$

$$x^2 + 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$$

Se agrupan los términos en función de la ecuación

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0}$



DETERMINAR CENTRO Y RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA DADA LA ECUACIÓN

Para los datos requeridos se lleva la ecuación general a su forma ordinaria y se asocian los términos en “x” y en “y”, Ejemplo:

$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$

Solución:

Se ordenan los términos en orden creciente:

$x^2 - 6x + y^2 + 2y + 1 = 0$

$(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = 0 - 1$

$(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = -1$

Se completan los trinomios cuadrados perfectos, para ello se toma la mitad del coeficiente de “x” y de “y” y se eleva al cuadrado; luego se suma a ambos lados de la ecuación y por último se factoriza.

Coeficiente de “x”= $\frac{6}{2} = 3$ Coeficiente de “y”= $\frac{2}{2} = 1$

Se completan los trinomios con los valores obtenidos anteriormente.

$$(x^2 - 6x + 3^2) + (y^2 + 2y + 1^2) = -1 + 3^2 + 1^2$$

Se factorizan los trinomios y se reducen los términos al otro lado del igual:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = -1 + 9 + 1 \rightarrow$$

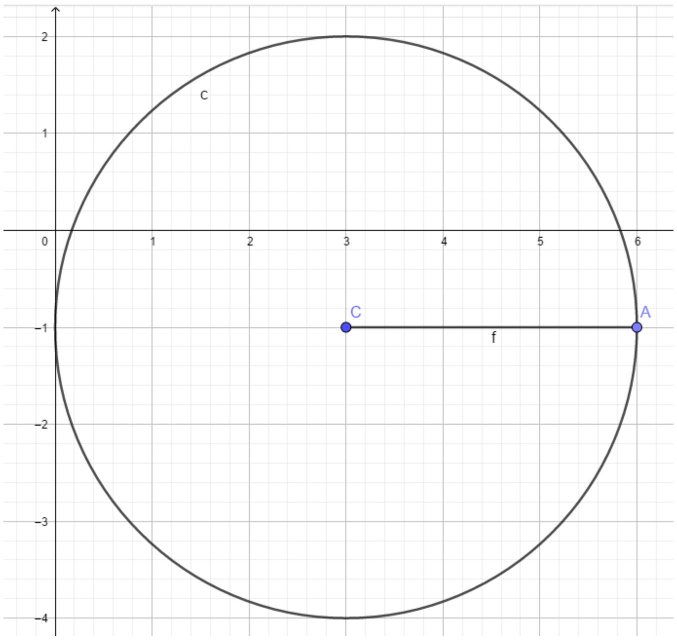
$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

Se comparan los valores con la forma de la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

h= 3 k= -1 r= 3

El valor de “k” queda negativo porque se hace ley de signos entre el paréntesis de la ecuación y el de la fórmula. De esta manera, el centro de la ecuación es C (3, -1)



2. Encontrar el centro y el radio de la circunferencia definida por la ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

Solución:

Se ordenan los términos en orden creciente:

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y - 2 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) = 0 + 2$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) = 2$$

Se completan los trinomios cuadrados perfectos, para ello se toma la mitad del coeficiente de “x” y de “y” y se eleva al cuadrado; luego se suma a ambos lados de la ecuación y por último se factoriza.

Coeficiente de “x”= $\frac{2}{2} = 1$ Coeficiente de “y”= $\frac{2}{2} = 1$

Se completan los trinomios con los valores obtenidos anteriormente.

$$(x^2 - 2x + 1^2) + (y^2 - 2y + 1^2) = 2 + 1^2 + 1^2$$

Se factorizan los trinomios y se reducen los términos al otro lado del igual:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 + 1 + 1 \rightarrow$$

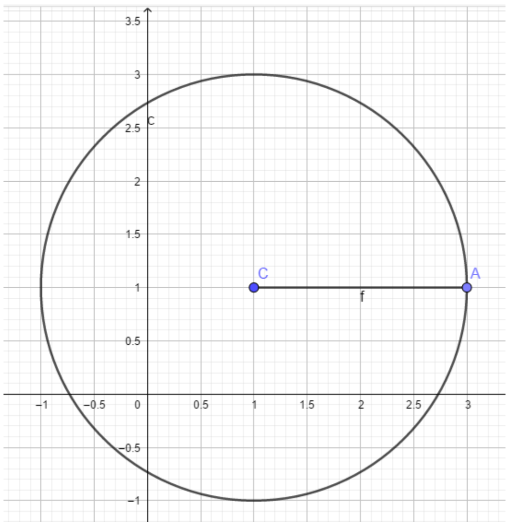
$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

Se comparan los valores con la forma de la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

h= 1 k= 1 r= 2

Para obtener el valor del radio se debe sacar la raíz cuadrada ($\sqrt{4} = 2$)



3. Encontrar el centro y el radio de una circunferencia, dada su ecuación general

$x^2 + y^2 - 4x - 7y - 4 = 0$

Solución:

Se ordenan los términos en orden creciente:

$x^2 - 4x + y^2 - 7y - 4 = 0$

$(x^2 - 4x) + (y^2 - 7y) = 0 + 4$

$(x^2 - 4x) + (y^2 - 7y) = 4$

Se completan los trinomios cuadrados perfectos, para ello se toma la mitad del coeficiente de "x" y de "y" y se eleva al cuadrado; luego se suma a ambos lados de la ecuación y por último se factoriza.

Coeficiente de "x"= $\frac{4}{2} = 2$ Coeficiente de "y"= $\frac{7}{2}$

Se completan los trinomios con los valores obtenidos anteriormente.

$$(x^2 - 4x + 2^2) + \left(y^2 - 7y + \left(\frac{7}{2}\right)^2\right) = 4 + 2^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

Se factorizan los trinomios y se reducen los términos al otro lado del igual:

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = 4 + 4 + \frac{49}{4} \rightarrow$$

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = 8 + \frac{49}{4} \rightarrow$$

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{32 + 49}{4} \rightarrow$$

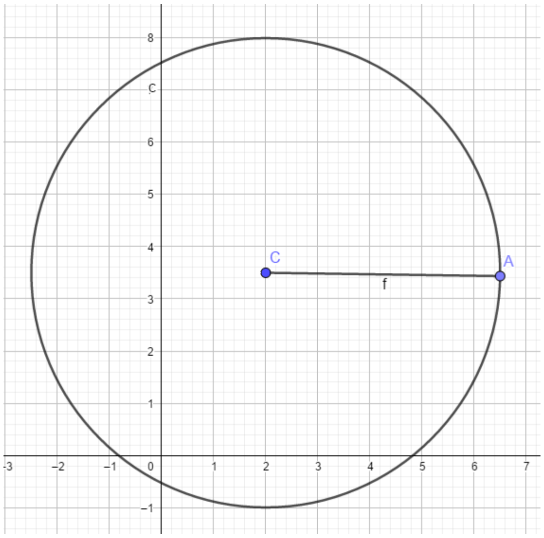
$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

Se comparan los valores con la forma de la ecuación

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

h= 2 k= - $\frac{7}{2}$ r= $\frac{9}{2}$

Para obtener el valor del radio se debe sacar la raíz cuadrada $\sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$



ACTIVIDAD DE PROFUNDIZACIÓN

1. Encontrar el centro y el radio de una circunferencia cuya ecuación es:
   $x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0$
2. Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro se halle en el origen y que pasa por el punto A (3,4).
3. Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$
4. Encontrar el centro, el radio y la ecuación general de una circunferencia cuyos extremos del diámetro son los puntos A (0,4) y B (6, -2)
5. Hallar el centro y el radio de una circunferencia cuya ecuación es:
   $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

BIBLIOGRAFÍA - CIBERGRAFÍA

Bibliografía: guía de aprendizaje.

Web grafía:

Página del área: www.matematicasefb.jimdofree.com

Plataforma Khan academy: https://es.khanacademy.org/

"Yo no estudio para saber más, sino para ignorar menos". Sor Juana Inés de la Cruz.